



∴

Visualización descriptiva y justificación de fórmulas de superficie en un ambiente de geometría dinámica con estudiantes de licenciatura

Descriptive visualization and justification of surface area formulas in a dynamic geometry environment with undergraduate students

Recepción: 21 de abril de 2026 | Aceptación: 30 de mayo de 2026

Marco Polo Mendoza Martínez¹ 

Resumen

Esta investigación analiza el proceso que siguen los estudiantes de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria al justificar fórmulas de superficie de polígonos en un ambiente de geometría dinámica con el software GeoGebra. Se aplicó una ingeniería didáctica con 23 estudiantes de cuarto semestre mediante nueve guías didácticas centradas en la construcción de cuadriláteros, triángulos y polígonos regulares. El estudio reporta cómo los participantes transitan de la rigidez geométrica del lápiz y papel hacia el arrastre, la animación y la identificación de invariantes. Los resultados muestran que la visualización dinámica aporta elementos para construir argumentaciones matemáticas sobre las fórmulas de área, reconocer propiedades geométricas y generalizar procedimientos. Se concluye que la geometría dinámica, articulada con guías didácticas diseñadas con fines específicos, favorece la construcción del razonamiento geométrico en la formación inicial docente.

Palabras clave: geometría dinámica, visualización matemática, formación docente.

Abstract

This research analyzes the process that students of the Bachelor's Degree in Teaching and Learning of Mathematics in Secondary Education follow when they justify surface area formulas of polygons in a dynamic geometry environment with GeoGebra software. A didactic engineering approach was applied with 23 fourth-semester students through nine didactic guides centered on the construction of quadrilaterals, triangles, and regular polygons. The study reports how participants move from the geometric rigidity of pencil and paper toward dragging, animation, and the identification of invariants. The results show that dynamic visualization contributes elements for the construction of mathematical arguments about area formulas, the recognition of geometric properties, and the generalization of procedures. The work concludes that dynamic geometry, articulated with didactic guides designed for specific purposes, favors the construction of geometric reasoning in initial teacher education.

Keywords: dynamic geometry, mathematical visualization, teacher education.

¹ marcowendy77@gmail.com, Docente, Escuela Normal Superior del Estado de México.

Introducción

La enseñanza de la geometría euclidiana ha transitado por importantes transformaciones durante las últimas décadas. Los recursos informáticos, y en particular el software de geometría dinámica, han transformado el tratamiento didáctico de los objetos geométricos al ofrecer entornos donde el estudiante manipula, arrastra y experimenta con las propiedades de figuras planas (Sandoval-Cáceres, 2009). Estas tecnologías introducen una forma distinta de trabajar con representaciones, ya que ofrecen flexibilidad, repetición y reconstrucción, atributos que el lápiz y el papel no logran reproducir (Borba & Villarreal, 2005).

La incorporación de software de geometría dinámica en el aula ha generado evidencia sobre su incidencia en el desempeño matemático. Por ejemplo, el trabajo de Arias-Cabezas et al. (2003) reporta un incremento del 25% en el aprendizaje de las matemáticas en una muestra de 15,000 estudiantes españoles de enseñanza secundaria, y Pumacallahui-Salcedo et al. (2021) documentan resultados similares con GeoGebra en el contexto peruano, donde el software demostró potencialidad para reequilibrar una enseñanza que, apoyada exclusivamente en pizarra y plumón, tiende a la mecanización de los procedimientos geométricos. El trabajo se interesa por lo que ocurre dentro de ese contexto, en concreto por los procesos cognitivos que median entre la manipulación de la figura dinámica y la construcción de un argumento geométrico, es decir, la visualización, la construcción y la justificación como procesos articulados.

Introducir la geometría dinámica en el aula no resuelve por sí solo uno de los problemas más persistentes de la educación matemática, es decir, el tránsito de la validación empírica hacia el argumento con estructura deductiva. Un estudiante puede constatar en pantalla que una propiedad se conserva al arrastrar la figura y, aun así, no producir una justificación matemática de por qué eso ocurre. Balacheff (1993) documentó esta problemática entre la convicción empírica y la prueba formal, y Sánchez-Sánchez (2003), con Cabri-Géomètre, mostró que las actividades en ambientes dinámicos no garantizan por sí mismas ese tránsito. Otros estudios como el Dalcín-Oliveira (2013) demuestran que el arrastre sí produce convicción sobre la certeza de una conjetura, pero la convicción no equivale a la justificación. Ese es el problema que este trabajo atiende.

En el escenario mexicano, se identifica un antecedente en el proyecto Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (EMAT), iniciado en 1997 por la Subsecretaría de Educación Básica y Normal en conjunto con el Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (Ursini-Legovich & Orendain-Tremear, 2000). El proyecto se implementó de forma experimental en 15 escuelas secundarias públicas de ocho estados de la república, con el reto de elevar la calidad de la enseñanza de las matemáticas, renovar la formación

de profesores, promover el uso de las nuevas tecnologías y actualizar los métodos y contenidos de la matemática escolar. Para geometría dinámica, EMAT propuso el trabajo con Cabri-Géomètre planteando la exploración, la elaboración de conjeturas y la verificación práctica de teoremas geométricos. En el plano internacional, el trabajo de Pérez-Sanz (2002) documenta una experiencia similar en España, con actividades, tutoriales y guías didácticas para la geometría escolar basadas en Cabri y su aplicación Cabriweb, pensada para el aula con o sin conexión a internet.

Estos proyectos representan un referente sobre las posibilidades didácticas del software de geometría dinámica en contextos escolares reales. A partir de esa base, cobra sentido preguntarse qué tipo de experiencia matemática propicia ese entorno y bajo qué condiciones cognitivas el estudiante construye conocimiento geométrico a través de él. Esa pregunta remite a los fundamentos sobre cómo aprenden las personas cuando afrontan situaciones matemáticas.

Si se asume que el conocimiento se construye como resultado de afrontar situaciones y no como una mera acumulación de información, entonces la didáctica debe otorgar un papel protagónico a la selección de experiencias con sentido. De acuerdo con Piaget (1955), las experiencias habilitan la construcción de esquemas o modelos mentales que se amplían y se vuelven sofisticados mediante un proceso continuo de asimilación y acomodación. Por lo tanto, las situaciones para la enseñanza, en vez de reducirse a trabajos procedimentales, tendrían que ampliarse hacia actividades que pongan en juego los saberes previos, con escenarios donde los estudiantes experimentan e interiorizan experiencias de aprendizaje. Un ambiente de geometría dinámica permite al estudiante explorarla desde una perspectiva variacional, con lo cual reconoce invariantes y propiedades de los objetos geométricos. Para la didáctica, esto representa un escenario donde se pueden plantear preguntas, comprobar hipótesis o construir argumentos, con herramientas de arrastre, traslación, rotación y reflexión que operan sobre la representación.

Un docente de matemáticas no aprende geometría del mismo modo que otros estudiantes. Además de dominar el contenido, necesita ser capaz de justificar las fórmulas y propiedades que más adelante pedirá a sus alumnos que usen. Cuando a eso se agrega el trabajo con software de geometría dinámica, la demanda se amplía, pues el docente en formación debe aprender a razonar con la herramienta y, a la vez, anticipar cómo esa herramienta puede operar en su propia aula. El contexto de este estudio es la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria, plan 2018, cuya malla curricular incorpora la geometría dinámica como eje transversal en cursos como Razonamiento Geométrico, Magnitudes y Medidas, Trigonometría y Geometría Plana y del Espacio.

Con el propósito de caracterizar el punto de partida del grupo, se aplicó un instrumento diagnóstico de 20 preguntas sobre conocimientos básicos de

geometría euclidiana, que incluyó nociones generales, cálculo de perímetro y superficie de cuadriláteros, triángulos, polígonos regulares y círculo. La media de aprovechamiento fue de 6.2 sobre 10, con desempeño particularmente bajo en polígonos regulares y figuras compuestas. El patrón más consistente no fue el error de cálculo sino la ausencia de justificación, pues los estudiantes aplicaban las fórmulas sin poder dar cuenta de su origen ni de las propiedades geométricas que las sustentan. Este hallazgo adquiere relevancia si se considera que el Plan de Estudios de Matemáticas para Educación Secundaria (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2011) establece que los alumnos deben justificar y usar las fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes, y que los participantes de este estudio serán quienes conduzcan esa tarea con sus propios grupos. Aprender a justificar las fórmulas, entonces, no es solo un contenido matemático pendiente, es una condición para enseñar.

La investigación se desarrolla alrededor de dos preguntas. ¿Qué fenómenos de visualización emergen cuando los estudiantes de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria construyen figuras geométricas en un ambiente de geometría dinámica con GeoGebra, y cómo se articulan con la producción de argumentos matemáticos sobre las fórmulas de superficie?, y ¿De qué manera el arrastre incide en la superación de la rigidez geométrica y en la generalización de propiedades a distintas categorías de polígonos?

Fundamentos teóricos

Visualización matemática

De acuerdo con Steen (1988), las operaciones visuales en el estudio de las matemáticas básicas tienen un impacto importante en la construcción y la comprensión de los conceptos. La visualización se pone en juego cuando el sujeto analiza y determina características, relaciones y propiedades de los objetos matemáticos que se representan. Las imágenes o representaciones gráficas contienen información matemática que debe ser identificada y reconocida, tarea que en ocasiones genera obstáculos para los estudiantes.

Arcavi (2000) define la visualización como la habilidad que surge como resultado de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre imágenes y diagramas, ya sea en la mente, en papel, o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión de las matemáticas. Arcavi (2015) identifica tres dimensiones de la visualización en la educación matemática. Primera, la visualización como medio para la toma de conciencia, relacionada con el momento que Freudenthal (1991) denominó “ajá”, cuando las piezas encajan y las ideas se conectan. Segunda, la visualización y la sistematicidad, que señala sobre los engaños que pueden provocar las representaciones, ante los cuales el argumento matemático ayuda a despejar dudas. Tercera, la

visualización y la prueba, que se refiere a la transformación visual de figuras como parte de una cadena deductiva y de una secuencia explicativa que lleva de la premisa al enunciado por probar.

Sin embargo, trabajar con representaciones no es una tarea trivial. Duval (2006) advierte que los objetos matemáticos solo son accesibles a través de sus representaciones, lo cual coloca en el centro del aprendizaje la capacidad de moverse con coherencia entre distintos modos de representar un mismo objeto, ya sea una figura, una expresión algebraica o una descripción verbal. Esa conversión entre registros es una de las fuentes de dificultad más documentadas en la educación matemática (Hitt, 1998; Eliaj et al., 2006), y representa el escenario donde la geometría dinámica ofrece condiciones distintas a las del lápiz y papel.

Geometría dinámica y Espacio de Trabajo Geométrico

La geometría dinámica se concibe como un instrumento de naturaleza semiótica que habilita la representación del objeto geométrico. El razonamiento geométrico se enriquece tanto por la visualización de la representación como por las argumentaciones que se exponen a partir de la percepción y el razonamiento (Larios-Osorio, 2006).

Para articular el nivel matemático con el nivel cognitivo de la actividad geométrica, Kuzniak et al. (2016) proponen el Espacio de Trabajo Geométrico (ETG), un modelo diseñado para analizar cómo el estudiante construye significados al trabajar con problemas matemáticos. El ETG opera en dos planos simultáneos. En el plano epistemológico, la actividad geométrica se organiza a partir de los objetos concretos del espacio real, los artefactos disponibles (en este caso, las herramientas del software de geometría dinámica), y el marco teórico que define los elementos y propiedades geométricas. En el plano cognitivo, la construcción de conocimiento se produce mediante tres génesis articuladas: la génesis figural, vinculada a la visualización y la representación; la génesis instrumental, que corresponde al uso de los artefactos del software como el arrastre, la traslación y la rotación; y la génesis discursiva, que se expresa en la argumentación y la prueba. Lo que el ETG aporta como herramienta analítica es la posibilidad de rastrear cómo esos tres procesos se articulan cuando el estudiante justifica una fórmula geométrica, que es el objeto de análisis de esta investigación.

Para que las tres génesis del ETG operen de forma articulada, el ambiente de trabajo debe ofrecer condiciones que vayan más allá de la representación canónica que aparece en los libros de texto. Las herramientas digitales amplían ese repertorio al poner a disposición del estudiante múltiples formas de representar un mismo objeto matemático, desde la figura animada hasta la expresión algebraica o la descripción verbal, con lo cual se amplía también el campo de significados posibles (Biehler, 1994). Esa diversidad no es un fin en

sí misma, por ejemplo, Christou et al. (2005) y Yerushalmy (1997) documentan que las experiencias didácticas con distintas formas de representación motivan la generalización y la identificación de invariantes, procesos que corresponden directamente a la génesis discursiva del ETG. Presmeg (2006) agrega que las actividades que promueven la construcción de imágenes contribuyen de forma positiva a la comprensión matemática, lo que conecta con la génesis figural. Cuando el estudiante arrastra una figura, verbaliza lo que observa y produce un argumento, las tres génesis ocurren de forma encadenada, no por separado.

Rigidez geométrica y arrastre

El concepto de rigidez geométrica remite a la exploración limitada que produce el trazo de una figura plana en el cuaderno o block de dibujo. Al trazar, por ejemplo, un romboide sobre papel, el dibujo obstruye la exploración de propiedades como los ángulos opuestos, la longitud de los lados paralelos o la relación del punto de intersección de las diagonales (Larios-Osorio, 2006). En contraste, el arrastre, rasgo característico del software de geometría dinámica, permite la modificación controlada de la figura sin que esta pierda sus propiedades definitorias. Gracias al arrastre, el estudiante puede someter sus conjeturas a prueba directamente sobre la figura, algo que el trazo estático no permite. El arrastre genera una demanda cognitiva que va más allá de observar cómo se mueve la figura. Cuando el estudiante modifica un polígono y constata que ciertas propiedades se mantienen sin importar la posición, enfrenta la necesidad de nombrar esa invariancia y de explicar por qué ocurre. Ese tránsito de la imagen a la palabra es el que da pie a la argumentación, que Zazkis et al. (1996) documentan que se produce como el movimiento entre una representación visual y su expresión verbal. Falcade et al. (2007) señalan que ese proceso ocurre porque el estudiante tiene control sobre las herramientas y construye representaciones a partir de sus propias acciones, y no de instrucciones externas. En ese sentido, el software amplía el campo de experiencias disponibles (Biehler, 1994), y con ello, las oportunidades de que la génesis discursiva, la argumentación y la prueba tenga algo concreto sobre qué operar.

Método

Perspectiva metodológica y diseño

La investigación se apoya en la ingeniería didáctica como metodología, cuya denominación proviene de la semejanza con el trabajo de un ingeniero, quien para ejecutar un proyecto se apoya en el conocimiento científico que domina y se somete a un control de tipo científico (Artigue, 1995). A diferencia de otras metodologías cualitativas, la ingeniería didáctica describe lo que ocurre en el aula, pero además diseña las condiciones de enseñanza, las pone en práctica y confronta lo previsto con lo obtenido. Su proceso se organiza en cuatro fases.

La primera es el análisis preliminar, donde se examinan los antecedentes teóricos y empíricos del contenido a enseñar, la enseñanza tradicional y sus efectos, y las concepciones previas de los estudiantes. En este estudio, esa fase produjo dos insumos, una revisión de la literatura sobre geometría dinámica y justificación matemática, y un instrumento diagnóstico de 20 preguntas aplicado al grupo participante, cuyos resultados revelaron aplicación mecánica de fórmulas y dificultad para distinguir categorías próximas de polígonos.

La segunda fase es la concepción y el análisis a priori, donde se diseñan las situaciones didácticas y se anticipan las respuestas probables de los estudiantes. Con base en el diagnóstico, se diseñaron nueve guías didácticas organizadas en tres bloques: cuadriláteros, triángulos y polígonos regulares. Cada guía establece una secuencia de construcción en GeoGebra, un reto-actividad que demanda la construcción animada con deslizadores, y preguntas que llevan al estudiante a argumentar las propiedades y fórmulas del polígono construido. El análisis a priori anticipó, para cada actividad, las dificultades probables y los procedimientos esperados.

La tercera fase es la experimentación, que consiste en la puesta en práctica de las situaciones diseñadas. Las actividades se desarrollaron en sesiones semanales en el laboratorio de cómputo de la institución, con tareas asincrónicas en la plataforma Schoology. Las producciones de los estudiantes, archivos de GeoGebra, respuestas escritas y conclusiones, se registraron en un repositorio digital en Teams y fueron complementadas con observaciones de aula. La cuarta fase es el análisis a posteriori y la validación, donde se confronta lo previsto en el diseño con lo efectivamente producido por los estudiantes. El análisis siguió un proceso cualitativo en tres momentos: clasificación de respuestas por actividad, confrontación entre el análisis a priori y las producciones reales, y triangulación con los registros de observación. La validación es interna, ya que se sustenta en la coherencia entre las hipótesis del diseño y los datos recogidos durante la experimentación.

Participantes y contexto

Los participantes fueron 23 estudiantes de cuarto semestre de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria, plan 2018, de una Escuela Normal en el Estado de México. La mayoría son oriundos del Estado de México, de nivel socioeconómico medio y medio-bajo. La institución cuenta con dos laboratorios de cómputo con acceso a Internet, infraestructura acorde con las recomendaciones para el uso de Tecnologías de la Información y la Comunicación en la educación normalista.

Estudio diagnóstico

Como parte del análisis preliminar, se aplicó un formulario electrónico con Google Forms cuyo propósito fue reconocer el dominio de los conocimientos

básicos de la geometría euclidiana y el uso de fórmulas para resolver problemas de perímetro y superficie. El instrumento contempló 20 preguntas distribuidas en nociones generales de geometría y cálculo del perímetro y superficie de cuadriláteros, triángulos, polígonos regulares y círculo. La media de aprovechamiento fue de 6.2 sobre 10, con desempeño bajo en polígonos regulares y figuras compuestas. La Tabla 1 concentra los resultados por contenido, con las tasas de acierto y error y una observación por caso.

Tabla 1

Resultados del diagnóstico por contenido geométrico.

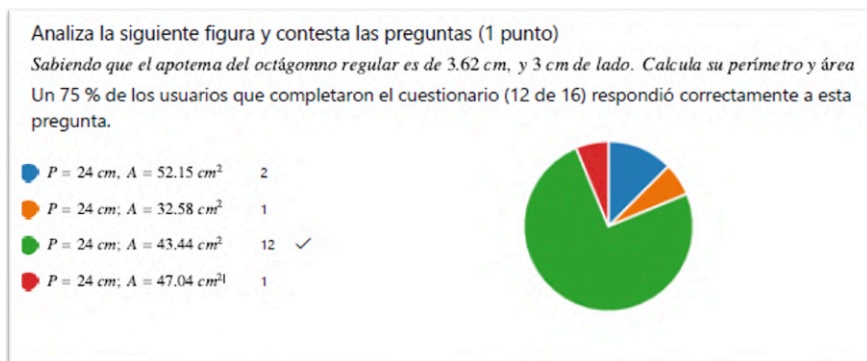
Contenido	% Acierto	% Error	Observación
Rombo (perímetro)	75	25	Reconocen que los cuatro lados son congruentes
Rombo (superficie)	25	75	No recuerdan la fórmula ni identifican las diagonales
Trapezio (perímetro)	50	50	Requiere aplicar Teorema de Pitágoras para obtener medidas faltantes
Trapezio (superficie)	12	88	Error acumulado: fórmula desconocida más dificultad con Pitágoras
Triángulo (Teorema de Pitágoras)	63	37	La mayoría aplica correctamente el teorema
Triángulo (perímetro)	63	37	Resultado coherente con el anterior
Triángulo (superficie)	38	62	Confunden la altura con un segmento ya conocido del problema
Romboide (perímetro)	81	19	Reconocen que los lados opuestos son congruentes
Romboide (superficie)	50	50	La mitad no identifica la altura como perpendicular a la base
Cuadrado inscrito en circunferencia (perímetro y superficie)	44	56	No relacionan el radio con la diagonal para obtener el lado
Círculo (superficie)	69	31	Recuerdan la fórmula al tener el radio disponible
Cuadrado y rectángulo (perímetro y superficie)	56–63	37–44	Confunden igualdad de áreas con igualdad de perímetros
Polígono regular (perímetro y superficie)	75	25	Aplican la fórmula cuando se proporcionan el lado y la apotema
Figura compuesta (perímetro y superficie)	19–25	75–81	Mayor dificultad: requiere descomponer la figura y razonar por partes

Los resultados del instrumento revelaron tres patrones que orientaron el diseño de las guías. El más extendido fue la aplicación de fórmulas sin comprensión de su origen, visible tanto en los errores del rombo y el romboide como en los del polígono regular, donde los estudiantes no lograban identificar

los elementos geométricos que las fórmulas expresan. La Figura 1, correspondiente al reactivo del octágono regular, ilustra este patrón; aunque el 75% del grupo respondió correctamente al contar con la apotema y el lado como datos explícitos, las respuestas incorrectas revelan que quienes erraron no comprendían el papel de la apotema en la fórmula. Un segundo patrón fue la confusión entre categorías próximas, como rombo y romboide, o trapecio y trapezoide, lo que señaló la necesidad de actividades donde las propiedades definitorias de cada figura fueran verificables mediante el arrastre. El tercer patrón, y el de mayor incidencia, correspondió a las figuras compuestas, con tasas de error superiores al 75%, que evidenciaron la dificultad de descomponer una figura cuando esa habilidad no se ha construido previamente con figuras simples.

Figura 1

Resultados del diagnóstico en el contenido de perímetro y superficie del polígono regular



Diseño de la ingeniería didáctica

A partir de este diagnóstico se diseñaron nueve guías didácticas distribuidas en tres bloques: cuadriláteros, triángulos y polígonos regulares. El orden no es casual, ya que cada fórmula se construye apoyándose en la que se argumentó antes, de modo que el rectángulo es la primera referencia, de ahí se deriva el romboide, del romboide el triángulo, y del triángulo los polígonos regulares.

El bloque de cuadriláteros parte de la diferencia entre paralelogramos (cuadrado, rectángulo, rombo y romboide), trapecios (rectángulo, isósceles y escaleno) y trapezoides (simétrico y asimétrico). Las primeras cuatro guías llevan al estudiante a construir y animar cada figura con deslizadores, de modo que el arrastre ponga a prueba la definición en cualquier posición. Las guías siguientes trabajan la justificación de las fórmulas mediante transformaciones geométricas visibles en pantalla. Para el romboide, un triángulo se traslada hasta convertir la figura en un rectángulo de área equivalente. Para el trapecio, se duplica la figura, se rota 180° y aparece un romboide ya conocido. Para el

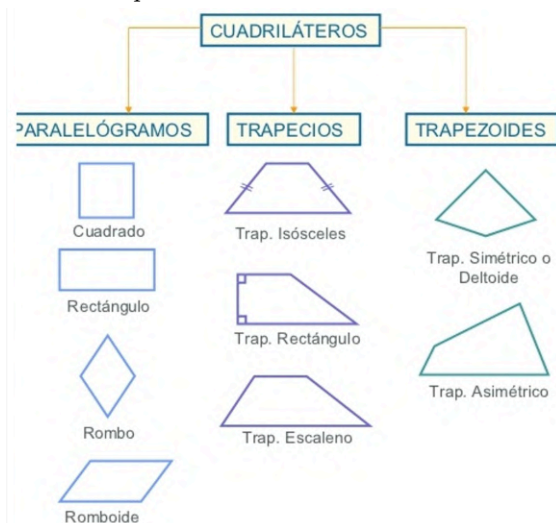
trapezoide simétrico, la figura se separa en dos triángulos congruentes que comparten la diagonal mayor.

En el bloque de triángulos, tras construir y animar los cinco tipos, la justificación de la fórmula parte de un triángulo cualquiera. El estudiante traza paralelas desde sus vértices, genera un paralelogramo y constata que el triángulo original y el obtenido por reflexión son congruentes. De ahí, la fórmula se deriva de ahí, como la mitad del área del paralelogramo. Los polígonos regulares, —pentágono, hexágono y heptágono—, se construyen mediante rotaciones sucesivas de un triángulo central cuyo ángulo se obtiene por razones trigonométricas. La fórmula general surge al reconocer que cualquier polígono de n lados se descompone en n triángulos congruentes cuya altura es la apotema.

En los tres bloques, cada guía tiene la misma estructura, con instrucciones de construcción paso a paso en GeoGebra. Esto constituye un reto que pide construir la figura de forma animada con deslizadores, además de la resolución de preguntas donde el estudiante escribe su argumentación. La Figura 2 muestra la clasificación de cuadriláteros que opera como punto de partida del primer bloque.

Figura 2

Clasificación de cuadriláteros empleada en el diseño de las actividades.



La Figura 3 muestra el formato completo de la primera guía del bloque de cuadriláteros, dedicada a la construcción del cuadrado. Su estructura es representativa de las nueve guías del diseño. Cada una incluye un encabezado institucional con los datos del estudiante y del facilitador, una secuencia numerada de instrucciones para GeoGebra con las herramientas específicas

que deben usarse en cada paso, preguntas que solicitan calcular y justificar el perímetro y la superficie del polígono construido, y un reto final que pide construir una versión animada de la figura con deslizadores y enviarla a la plataforma Schoology.

Figura 3

Guía didáctica correspondiente a la actividad 1 del bloque de cuadriláteros (construcción del cuadrado).

ACTIVIDAD No. 1

GEOMETRÍA DINÁMICA GRADO: 6° SEMESTRE

NOMBRE DEL ALUMNO: _____

CONSTRUCCIÓN DEL CUADRADO

1. En la barra de herramientas, selecciona segmento, e indica que mida 5 cm.
2. Selecciona perpendicular, da un clic al segmento *f* y otro al punto A.
3. Selecciona circunferencia centro y radio, da clic al punto A e indica que el radio mida 5 cm.
4. En el menú de punto, selecciona intersección, primero da clic a la circunferencia y luego a la recta perpendicular *g* del paso 2.
5. Selecciona paralela, da clic al segmento *f* e indica con otro clic que esa paralela toque el punto C.
6. Selecciona perpendicular, da clic al segmento *f* y luego al punto B.
7. Selecciona intersección entre la recta *h* del paso 5 y la recta perpendicular *i* del paso 6.
8. Selecciona polígono y da clic a los cuatro puntos que forman el cuadrado, A, B, E, C, formando así el polígono cl.
9. De acuerdo con las medidas indicadas, ¿cuál es el perímetro del cuadrado construido?

R1. _____

Justificación de tu respuesta: _____

10. ¿Cuál es la superficie del mismo?

R2. _____

Justificación de tu respuesta: _____

Reto-Actividad. Con los elementos estudiados en esta sesión, construye un cuadrado con una medida diferente a la de hoy y otro cuadrado que no tenga medida específica, es decir, que pueda amplificarse o reducirse al ser arrastrado con el cursor. La actividad se enviará al grupo GeoGebra Club de la plataforma Schoology.

Análisis

El análisis fue de corte cualitativo y tomó como unidad las producciones de cada actividad. Las respuestas escritas en los cuadros de texto de GeoGebra y en las guías se clasificaron según la argumentación ofrecida y los recursos del software empleados, y se confrontaron con lo previsto en el diseño de cada actividad. Esta confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori es el momento central de la validación en la ingeniería didáctica, ya que su

propósito no es únicamente constatar si los estudiantes lograron lo esperado, sino identificar los aportes no anticipados, los procedimientos alternativos y los alcances que la actividad abrió más allá del diseño. La comparación se trianguló con los registros de observación de aula y con la evidencia visual de las construcciones.

El tratamiento de las producciones se orientó por las dos preguntas de investigación y se organizó en torno a tres categorías de análisis. La primera fue la identificación de invariantes mediante el arrastre, que atiende la pregunta sobre la incidencia del arrastre en la superación de la rigidez geométrica. Aquí se identificaron qué propiedades reconocieron los estudiantes como invariantes bajo la animación de los deslizadores, y qué casos límite, como la degeneración del rombo cuando los lados coinciden en un mismo segmento, quedaron expuestos por el movimiento.

La segunda categoría fue la articulación entre visualización y argumento, vinculada a la pregunta sobre los fenómenos de visualización. El análisis atendió cómo los estudiantes pasaron de la imagen construida a la justificación escrita, qué transformaciones geométricas aplicaron (traslación, rotación, reflexión), y si el argumento final se apoyó en la manipulación visual, en los criterios formales, o en una combinación de ambos. Esta categoría recupera las tres génesis del ETG propuesto por Kuzniak et al. (2016), figural, instrumental y discursiva, como lentes para describir los tránsitos entre la construcción y la argumentación.

La tercera categoría fue la generalización, que corresponde a la segunda parte de la pregunta sobre el arrastre y a la relación entre la visualización y la prueba. Se revisó cómo, a partir de un caso particular, los estudiantes producían fórmulas aplicables a toda una familia de polígonos, además de identificar qué papel jugó la construcción animada en ese tránsito del caso al enunciado general.

Resultados

El análisis de las producciones de las nueve actividades se organizó en torno a los tres ejes definidos en la sección de método, la identificación de invariantes mediante el arrastre, la articulación entre visualización y argumento, y la generalización. Cada eje atiende una de las dos preguntas que orientan la investigación. La presentación de los resultados sigue ese orden, con el material de las actividades incorporado como evidencia dentro de cada eje, y se cierra con una tabla comparativa entre los hallazgos del diagnóstico y los de la intervención.

Identificación de invariantes mediante el arrastre

El arrastre se observó como un dispositivo que obligó al estudiante a hacer visibles las propiedades de cada polígono en el momento mismo de la

construcción. Los hallazgos en este eje aparecieron en las actividades que requirieron una construcción animada con deslizadores.

En la actividad del rombo, dos deslizadores controlaban la longitud del lado y la amplitud del ángulo en un rango de 0 a 2π con incrementos de $\frac{\pi}{9}$. Al detener la animación en cualquier momento, los estudiantes observaron que la figura no siempre conserva las propiedades de un rombo, ya que en los 360° y 180° los lados coinciden sobre rectas horizontales y la figura degenera. Este hallazgo es importante porque moviliza la concepción estática del polígono, donde el rombo aparece como una imagen prototípica del libro de texto, hacia una concepción variacional donde la clase geométrica se define por el conjunto de propiedades preservadas bajo la variación de los parámetros. El arrastre hizo visibles los casos límite, tarea que el lápiz y el papel no permitirían.

En la actividad del trapecio escaleno, el arrastre apareció como herramienta diagnóstica. Cuando el estudiante no había empleado correctamente la herramienta paralela durante la construcción, la animación del deslizador puso al descubierto que los segmentos se cruzaban o perdían su disposición, y la figura dejaba de ser un trapecio. Varios participantes generaron, como reto, una figura sin par de segmentos paralelos, lo que se interpreta como confusión entre trapecio escaleno y trapecioide. El error quedó expuesto en pantalla y abrió la discusión sobre el criterio de paralelismo que distingue ambas categorías.

En la actividad del romboide, los deslizadores controlaron la longitud del lado y la amplitud del ángulo β . La construcción animada permitió a los estudiantes constatar que la fórmula del perímetro, $P = 2(a + b)$, y la fórmula del área, $A = b \cdot h$, se sostienen para todo valor de los parámetros. El grupo formuló también una expresión alternativa para el área en términos del ángulo entre lados adyacentes, $A = a \cdot b \cdot \sin \beta$, equivalente a la fórmula clásica cuando se sustituye $h = b \cdot \sin \beta$. La invariancia de ambas expresiones bajo la animación de los deslizadores constituyó el argumento central para sostener la generalidad de la fórmula. En palabras de un participante, el problema didáctico va más allá de dibujar un romboide, ya que reside en construir un romboide animado que conserve sus propiedades para todo valor del parámetro.

Articulación entre visualización y argumento

Este eje atiende la pregunta sobre los fenómenos de visualización y su relación con la producción de argumentos sobre las fórmulas. El análisis muestra que los estudiantes transitaron de la imagen construida a la justificación escrita mediante transformaciones geométricas observables en pantalla, y que los argumentos finales combinaron, en distintas proporciones, la manipulación visual con los criterios formales de la geometría euclidiana.

El procedimiento se observa con claridad en la justificación de la fórmula del romboide. Los estudiantes trazaron una recta perpendicular a AB que pasa por el punto E , marcaron la intersección con el lado paralelo opuesto, y

delimitaron el triángulo DEA . Con la herramienta de traslación, ese triángulo se desplazó mediante el vector u , y el romboide se transformó en un rectángulo $EDCE'$. Como la transformación preserva el área, y la fórmula del rectángulo había sido argumentada en la actividad previa, el grupo derivó que el área del romboide es $A = B \cdot h$. La argumentación se apoyó en la equivalencia visible entre las dos figuras tras la traslación, y no en la fórmula memorizada.

Como retroactividad de la quinta actividad, los participantes justificaron la fórmula del rombo. Para el perímetro, el grupo propuso dos expresiones equivalentes, $P = 4a$ en términos del lado, y $P = 2\sqrt{D^2 + d^2}$ en términos de las diagonales mayor (D) y menor (d), aprovechando que el rombo se descompone en cuatro triángulos rectángulos cuyos catetos son las semidiagonales. Para el área, la justificación visual partió de reconocer que las dos diagonales del rombo son perpendiculares y que la figura puede inscribirse en un rectángulo de lados D y d . La descomposición mostró que el área del rombo es la mitad del área del rectángulo, de donde $A = \frac{D \cdot d}{2}$.

Un aporte del grupo no anticipado en el análisis *a priori*, fue reconocer que dos lados adyacentes del romboide pueden ser leídos como vectores, con lo que el área del romboide corresponde con el módulo del producto vectorial de los vectores involucrados. La visualización apoyó esta interpretación al mostrar las perpendiculares construidas a los puntos A y B . Este salto conceptual, del plano geométrico clásico al tratamiento vectorial, surgió en la discusión sin estar previsto en la guía, lo que constituye un aporte inesperado que la confrontación entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori* dejó al descubierto.

La justificación de la fórmula del trapecio siguió un procedimiento equivalente. Los estudiantes construyeron el trapecio $ABCD$, lo trasladaron mediante el vector u y rotaron el segundo trapecio 180° ; la unión de ambos formó un romboide. La altura del romboide quedó identificada con la perpendicular trazada de e_1 que pasa por C , altura compartida por los dos trapecios. Como la base del romboide coincide con la suma de la base mayor y la base menor del trapecio ($B + b$), y la fórmula del romboide ya había sido argumentada como base por altura, los participantes derivaron que el área de un trapecio equivale a la mitad del área del romboide compuesto: $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$.

La actividad del triángulo aportó la articulación más explícita entre lo visual y lo formal. La justificación de la congruencia entre el triángulo original y el obtenido por reflexión es la parte más sustantiva del razonamiento. Una participante combinó dos tipos de argumento.

El primero, visual, consistió en señalar que con una rotación y una traslación un triángulo se superpone al otro. El segundo, formal, consistió en aplicar los criterios de congruencia de la geometría euclidiana. A partir de la superposición, se argumentó que si el romboide tiene superficie $\frac{B \times b}{2}$ y se compone de dos triángulos congruentes, la fórmula del triángulo es $\frac{B \times b}{2}$. La articulación de los dos argumentos evidencia los tres procesos cognitivos del

ETG (Kuzniak et al., 2016): la génesis figural en la imagen, la génesis instrumental en el uso del software y la génesis discursiva en la argumentación escrita.

La verbalización escrita dentro de los cuadros de texto del propio GeoGebra cumplió una función específica. La consigna de redactar la justificación obligó al estudiante a seleccionar los elementos centrales de la imagen y organizarlos como prosa matemática. Esta operación no duplica la imagen, la traduce a otro sistema semiótico, lo que coincide con los hallazgos de Zazkis et al. (1996) sobre el tránsito entre representaciones visuales y verbales.

Generalización

Este eje recupera la pregunta sobre el papel del arrastre en la generalización de propiedades a distintas categorías de polígonos. El hallazgo central es que la generalización emergió como consecuencia directa de la construcción animada y de la cadena de justificaciones encadenadas a lo largo de las actividades, y no como una operación posterior que el estudiante tuviera que efectuar por separado.

La generalización más fina apareció en la actividad del trapecio escaleno. Una estudiante argumentó que la fórmula que había justificado funciona para todos los trapecios, ya que la visualización de la construcción le había permitido identificar tres componentes presentes en todas las variantes: la altura del romboide, la base menor del trapecio invertido y la base mayor del trapecio original. Con esos tres componentes generalizó la expresión como:

$$\text{Área} = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

La operación no consistió en aplicar la fórmula a casos particulares, sino en reconocer la estructura común que sostiene la fórmula para toda la familia.

En la actividad del trapezoide simétrico, otra participante distinguió primero el trapezoide simétrico del asimétrico mediante la construcción. La justificación de la fórmula partió de marcar la diagonal mayor (D) para separar la figura en dos triángulos congruentes, y la diagonal menor (d) que corresponde a las dos alturas de esos triángulos unidas en un segmento. Como cada triángulo tiene base D y altura $\frac{d}{2}$, su área es:

$$\frac{D \cdot \frac{d}{2}}{2} = \frac{D \cdot d}{4}$$

Al multiplicar por dos para considerar los dos triángulos, se obtiene la fórmula del trapezoide simétrico, $A = \frac{D \cdot d}{2}$. La participante también diseñó una fórmula para el perímetro a partir de la suma de los cuatro lados, lo que no estaba previsto en la guía. El caso de mayor alcance en términos de generalización fue el de los polígonos regulares. La justificación de la fórmula

partió del reconocimiento de que el pentágono se descompone en cinco triángulos congruentes, cada uno con base m (lado del pentágono) y altura igual a la apotema a . El área de un triángulo es $\frac{m \cdot a}{2}$, y como hay cinco, el área total del pentágono es:

$$\frac{5 \cdot (m \cdot a)}{2} = \frac{5m \cdot a}{2}$$

Dado que el perímetro del pentágono regular es $P = 5m$, la expresión general queda como $A = \frac{P \cdot a}{2}$. El grupo extendió el razonamiento a un polígono de n lados, donde el área se generaliza como:

$$A = \frac{n \cdot m \cdot a}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$$

fórmula válida para cualquier polígono regular con perímetro P y apotema a .

La participante contrastó esta construcción con la práctica habitual de trazar únicamente el contorno del polígono con lápiz y papel, práctica que obstaculiza la identificación de los triángulos internos. En sus palabras, la visualización dinámica la habilitó para “ver lo invisible”, expresión que remite al planteamiento de Arcavi (2015) sobre el papel de la visualización en la didáctica de la geometría.

A lo largo de los tres ejes, los hallazgos muestran un patrón común, la justificación de cada fórmula se apoya en una figura de referencia cuya área ya ha sido argumentada. El cuadrado y el rectángulo funcionan como piezas iniciales, el romboide amplía el alcance, el triángulo se argumenta como la mitad del romboide, y los polígonos regulares se resuelven por descomposición en triángulos congruentes. Esta secuencia de justificaciones encadenadas, que el diseño de la ingeniería didáctica habilitó, es uno de los aportes no anticipados que la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori puso al descubierto.

Tabla 2

Análisis comparativo de las respuestas antes y después de la intervención didáctica

Contenido	Diagnóstico (lápiz y papel)	Intervención (GeoGebra)
Rombo	Confusión con romboide; escasa justificación	Justificación con diagonales y con lado por altura
Trapecios	Aplicación mecánica de la fórmula	Generalización a partir de la visualización de tres componentes
Triángulo	Fórmula aplicada sin justificar	Justificación por descomposición del paralelogramo en dos triángulos congruentes
Romboide	Dificultad para distinguirlo del rombo	Construcción animada; dos expresiones alternativas del área
Cuadrado inscrito	Errores en la relación radio-diagonal	Construcción con radio explícito; argumentación por propiedades
Polígonos regulares	Uso limitado de apotema	Descomposición en triángulos congruentes y generalización a n lados
Figuras compuestas	Dificultad para descomponer	Descomposición guiada por la construcción

Síntesis comparativa diagnóstico-intervención

Para cerrar la presentación de los resultados, la Tabla 2 sintetiza el contraste entre los hallazgos del estudio diagnóstico y los obtenidos durante la intervención didáctica. La comparación permite valorar el alcance de la geometría dinámica en cada uno de los contenidos tratados.

Discusión

Los resultados muestran que justificar fórmulas de geometría plana en un ambiente dinámico no se reduce a aplicar un procedimiento, sino que moviliza fenómenos cognitivos articulados entre sí. La discusión retoma los tres ejes de análisis para ponerlos en diálogo con la teoría revisada en los fundamentos, y cierra con las implicaciones para la formación docente y las limitaciones del estudio.

El arrastre y la superación de la rigidez geométrica

El contraste entre los hallazgos del diagnóstico y los de la intervención ofrece evidencia sobre el alcance de la rigidez geométrica descrita por Larios-Osorio (2006). En el diagnóstico, los estudiantes aplicaron fórmulas de forma mecánica y manifestaron confusiones entre categorías próximas, como rombo y romboide o trapecio escaleno y trapezoide. Esas confusiones no son atribuibles a desconocimiento de las definiciones, sino al hecho de que el dibujo estático en papel no permite poner a prueba las propiedades definitorias. La figura trazada con lápiz funciona como una imagen prototípica que el estudiante reconoce, pero no como un objeto que pueda variar y revelar lo que se mantiene.

Durante la intervención, el arrastre cambió esa condición. La animación del rombo con deslizadores permitió constatar que la figura degenera cuando el ángulo se aproxima a 180° , y que esa degeneración es precisamente la frontera de la clase rombo. La construcción animada del trapecio escaleno hizo visibles los errores de los estudiantes que no habían empleado la herramienta paralela, ya que los segmentos perdían su disposición durante la animación. En coincidencia con Dalcín-Oliveira (2013), la animación produjo convicción sobre las conjeturas, pues una propiedad se sostiene como verdadera cuando se mantiene invariante bajo el arrastre. Este criterio funcional de verdad geométrica desplaza el dibujo estático y lo sustituye por una clase de figuras cuya identidad reside en sus invariantes. Borba y Villarreal (2005) documentan esta misma concepción variacional de los objetos matemáticos en otros contenidos, lo que sitúa el hallazgo dentro de una tendencia más amplia sobre el trabajo con tecnología en educación matemática. La figura geométrica deja de ser un objeto fijo que el estudiante memoriza y pasa a ser un conjunto de relaciones preservadas bajo la variación de los parámetros. Esta concepción acerca la enseñanza escolar al modo en que el matemático trabaja con sus

objetos. En términos del ETG (Kuzniak et al., 2016), el arrastre articula con mayor densidad las tres génesis del modelo, ya que obliga al estudiante a hacer visible la propiedad definitoria (génesis figural) en el momento de operar el software (génesis instrumental) y de explicar lo que ocurre en pantalla (génesis discursiva). Falcade et al. (2007) propusieron que las herramientas de geometría dinámica operan como instrumentos de mediación semiótica, y los hallazgos de este estudio ofrecen evidencia de ese funcionamiento en el campo de la justificación de fórmulas.

La articulación entre visualización y argumento

En cuanto a los fenómenos de visualización, los hallazgos muestran que la imagen construida en GeoGebra no sustituyó al argumento matemático, sino que operó como su punto de partida. Arcavi (2015) distingue tres dimensiones de esa operación, y las tres aparecieron en las producciones del grupo. La toma de conciencia, el momento que Freudenthal (1991) denominó “ajá”, apareció con claridad en la actividad del romboide. Al reconocer que la traslación del triángulo D'EA convierte la figura en un rectángulo de área equivalente, los estudiantes experimentaron ese instante de conexión entre la imagen y la fórmula.

Algo similar ocurrió en la actividad del trapecio, cuando la duplicación y rotación 180° de la figura hizo aparecer un romboide ya conocido. Como sistematicidad, la imagen abrió el terreno para el argumento formal, tal como ocurrió en la actividad del triángulo, donde una participante combinó la superposición visual con los criterios de congruencia para sostener que la fórmula del triángulo es la mitad de la del paralelogramo asociado. Como prueba, la cadena deductiva se apoyó en transformaciones visuales (traslación, rotación, simetría) que funcionaron como secuencia explicativa entre la premisa y la conclusión.

El hallazgo coincide con Presmeg (2006) sobre la relación positiva entre la construcción de imágenes y la comprensión matemática, y agrega un elemento que el diseño introdujo de forma deliberada. La visualización se acopló con la escritura mediante la consigna específica de redactar la justificación dentro de los cuadros de texto del propio archivo de GeoGebra. Duval (2006) sitúa en el centro del aprendizaje matemático la capacidad de moverse con coherencia entre distintos registros de representación, y la consigna mencionada puso esa capacidad en juego.

Al redactar, el estudiante tuvo que seleccionar los elementos centrales de la figura y organizarlos como argumento escrito, lo que Zazkis et al. (1996) describen como la conversión de una representación visual en su expresión verbal. Esa conversión no es una operación trivial, porque al escribir el estudiante reelabora lo que vio y produce una versión del argumento que puede sostenerse sin la imagen.

Un aporte no anticipado del estudio fue la aparición espontánea de la lectura vectorial del área. El grupo reconoció que dos lados adyacentes del romboide pueden interpretarse como vectores y que el área corresponde al módulo de su producto vectorial. Esta conexión entre la geometría plana clásica y el tratamiento vectorial no estaba prevista en el diseño. La confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori, momento central de la validación en la ingeniería didáctica, fue lo que permitió identificar este aporte como un alcance adicional de la actividad.

La cadena de justificaciones como producto del diseño

La generalización de las fórmulas surgió de la progresión del diseño y no como una operación que los estudiantes tuvieran que efectuar por separado. El rectángulo fue la primera figura justificada, y a partir de ahí cada actividad apoyó su argumentación en la anterior. El romboide se derivó del rectángulo por traslación de un triángulo, el triángulo se obtuvo como la mitad del romboide, y los polígonos regulares se resolvieron por descomposición en n triángulos congruentes con la apotema como altura.

Christou et al. (2005) y Yerushalmy (1997) señalaron la diversificación de representaciones como condición para la generalización. Los resultados aquí presentados precisan ese planteamiento: la diversificación produce generalización cuando las representaciones están encadenadas entre sí, y no cuando aparecen como ejemplos sueltos de un mismo contenido. La actividad del pentágono lo muestra con claridad. La fórmula generalizada:

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

emergió al reconocer que cualquier polígono de n lados se descompone en n triángulos congruentes, descomposición que el contorno trazado en papel no hace visible. Una participante resumió esa diferencia con la expresión “ver lo invisible”, que remite al planteamiento de Arcavi (2015) sobre la visualización como acceso a estructuras que la representación estática oculta.

La cadena de justificaciones también amplía el repertorio de ejemplos disponibles para el estudiante, lo que coincide con el planteamiento de Biehler (1994) sobre la tecnología digital como ampliación del universo canónico de los libros de texto. Sin embargo, los resultados sugieren que esa ampliación no es solo cuantitativa. Cuando el repertorio se organiza en una secuencia argumentativa, la diversidad de ejemplos se transforma en una progresión conceptual donde cada caso particular alimenta al siguiente, lo que es propio del trabajo geométrico maduro.

Implicaciones para la formación inicial docente

Los participantes de este estudio no son estudiantes de geometría en sentido genérico, son futuros docentes de matemáticas en secundaria. Esa condición le

agrega una dimensión a los hallazgos, ya que aprender a justificar una fórmula y anticipar cómo enseñarla son procesos que en este grupo ocurrieron de forma simultánea. Una participante manifestó la intención de llevar las actividades a sus propios estudiantes, lo que muestra que la experiencia de construir y justificar la fórmula por sí mismos se transforma en un recurso disponible para su futura práctica.

Cuando el estudiante justifica una fórmula, esa justificación se convierte en un recurso disponible para su futura enseñanza. A diferencia de la fórmula memorizada, la fórmula construida trae consigo la secuencia de construcción, el andamiaje argumentativo y la experiencia de la manipulación dinámica, elementos que pueden trasladarse al aula de secundaria. Falcade et al. (2007) describen ese funcionamiento al conceptualizar el software de geometría dinámica como un instrumento de mediación semiótica que participa en la construcción del conocimiento matemático. Los cursos de Razonamiento Geométrico, Magnitudes y Medidas, y Geometría Plana y del Espacio del plan 2018 de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas ofrecen un marco curricular donde la articulación entre el contenido disciplinar y el diseño didáctico tiene condiciones para sostenerse.

Un elemento adicional tiene que ver con el ritmo de la enseñanza. Las nueve actividades se distribuyeron en sesiones semanales, con una construcción por sesión. Este ritmo lento, propio de la ingeniería didáctica, ofrece condiciones distintas de las que presenta una clase tradicional, donde la fórmula se enuncia al inicio y los ejercicios se suceden en minutos. El diseño aquí descrito se aproxima a la idea de Freudenthal (1991) sobre la enseñanza como reinención guiada, donde el estudiante reproduce en el aula la experiencia de construir conceptos a partir de la exploración. Aunque los programas escolares imponen restricciones de tiempo, una revisión de la distribución horaria de los cursos de geometría en la licenciatura podría habilitar diseños análogos en otros contenidos del plan.

Limitaciones

Se identificaron cuatro limitaciones en el desarrollo de la investigación. La primera es que el estudio se realizó con un único grupo de 23 estudiantes, lo que sugiere la transferencia con cautela de las conclusiones a contextos similares. La segunda es que la evidencia se apoya en producciones escritas y archivos del software, sin entrevistas sistemáticas que triangulen la interpretación. La tercera es que el seguimiento se centró en la fase de justificación dentro del aula normalista, sin observación longitudinal de la transferencia hacia la práctica docente en secundaria. La última atañe al rol del investigador, quien fue también el docente responsable de las actividades. Esta doble inserción favorece el acceso al campo, aunque introduce un posible sesgo de cercanía que conviene tener presente en lecturas posteriores de los datos.

Conclusiones

El estudio analizó el proceso por el cual los estudiantes de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria justifican las fórmulas de superficie de cuadriláteros, triángulos y polígonos regulares en un ambiente de geometría dinámica. La evidencia obtenida en las nueve actividades, organizada en torno a tres ejes de análisis y contrastada con el diagnóstico inicial, permite responder a las dos preguntas que orientaron la investigación.

Para la primera pregunta, sobre los fenómenos de visualización y su articulación con la producción de argumentos, los hallazgos muestran que la imagen construida en GeoGebra representó un punto de partida del razonamiento, y no la ilustración de una fórmula previamente conocida. Las transformaciones geométricas (traslación, rotación, simetría) sostuvieron la cadena deductiva en cada actividad. Por su parte, la consigna de redactar la justificación dentro del propio archivo del software acopló la visualización con la escritura, lo que afianzó el argumento al obligar al estudiante a reformular en lenguaje lo que había constatado en pantalla.

Para la segunda pregunta, sobre el papel del arrastre en la superación de la rigidez geométrica y en la generalización de propiedades, los hallazgos documentan dos efectos articulados. El arrastre transformó la figura geométrica en una clase de objetos cuya identidad reside en sus invariantes, lo que desplazó la concepción estática del polígono que el lápiz y el papel sostienen. Además, la generalización a familias completas de figuras emergió de la progresión del diseño, donde cada fórmula se argumentó apoyándose en la justificada en la actividad anterior, lo que produjo una cadena que arrancó en el rectángulo y llegó hasta los polígonos regulares.

Un hallazgo no anticipado, identificado en la confrontación entre el análisis *a priori* y el *a posteriori*, fue la aparición espontánea de la lectura vectorial del área del romboide. Este aporte sugiere que el ambiente dinámico habilita conexiones entre ramas de las matemáticas que habitualmente se enseñan por separado, lo que abre una línea de exploración para investigaciones posteriores.

Para la formación inicial de docentes de matemáticas, los hallazgos plantean que cuando el estudiante construye y justifica una fórmula con sus propios recursos, esa experiencia se convierte en un punto de partida para su futura enseñanza. El estudio aporta así un caso concreto sobre cómo los cursos de geometría de la licenciatura pueden articular el contenido disciplinar con el diseño didáctico.

Quedan abiertas varias líneas de trabajo futuro. Una sería la posibilidad de que el seguimiento longitudinal de los egresados permitiera valorar si las prácticas aquí documentadas se trasladan efectivamente al aula de secundaria. Así mismo, se puede trabajar sobre el papel del lenguaje escrito durante la

argumentación geométrica, dimensión introducida deliberadamente por el diseño, y su necesidad de un estudio empírico más detallado. La extensión del diseño hacia los volúmenes de cuerpos, las transformaciones en el plano y las secciones cónicas aportaría elementos para valorar el alcance del planteamiento en otros contenidos del currículo de secundaria.

Referencias

- Arcavi, A. (2000). Problem driven research in mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 19(2), 141–173.
[https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(00\)00042-0](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(00)00042-0)
- Arcavi, A. (2015). Revisiting aspects of visualization in mathematics education. *Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 1(8), 143–160.
- Arias-Cabezas, J. M., Maza Sáez, I., & Sáenz de Castro, C. (2003). *Formación e investigación sobre el uso de las tecnologías de la información y la comunicación en matemáticas para la ESO y los bachilleratos*. Comunidad de Madrid.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33–59). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Balacheff, N. (1993). Artificial intelligence and real teaching. En C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers. Mathematics education and technology* (pp. 131–158). Springer.
- Biehler, R. (1994). Functional thinking with graphs. *Journal of Research in Mathematics Education*, 25(5), 526–533.
- Borba, M. C., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and reorganization of mathematical thinking. Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. Springer.
- Christou, C., Pitta-Pantazi, D., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2005). The embodied, proceptual, and formal worlds in the context of functions. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 5(2), 241–252.
- Dalcín-Oliveira, L. M. (2013). *El desarrollo de un pensamiento deductivo en el bachillerato diversificado en un ambiente de geometría dinámica* [Tesis de maestría no publicada]. Instituto Politécnico Nacional.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103–131.
- Eliaj, E., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2006). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5(3), 533–556.
- Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions. Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, 66(3), 317–333.

- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education—China lectures*. Kluwer Academic Publishers.
- Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 123–134.
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 721–737.
- Larios-Osorio, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(3), 361–382.
- Pérez-Sanz, A. (2002). Geometría visual en Internet. *SUMA*, 41(1), 125–128.
- Piaget, J. (1955). *The language and thought of the child*. Meridian Books.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205–235). Sense Publishers.
- Pumacallahui-Salcedo, E., Acuña-Quispe, C. I., & Calcina-Álvarez, D. A. (2021). Influencia del software GeoGebra en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado de secundaria en el distrito de Tambopata de la región de Madre de Dios. *Educación Matemática*, 33(2), 245–273.
- Sánchez-Sánchez, E. (2003). La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración. Una experiencia en un ambiente de geometría dinámica. *Educación Matemática*, 15(2), 27–53.
- Sandoval-Cáceres, I. T. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática*, 21(1), 5–27.
- Secretaría de Educación Pública. (2011). Plan de estudios, educación secundaria. SEP.
- Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, 240(4852), 611–616.
- Ursini-Legovich, S., & Orendain-Tremear, M. (2000). *Geometría dinámica*. Secretaría de Educación Pública.
- Yerushalmy, M. (1997). Reaching the unreachable. Technology and the semantics of asymptotes. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2(1), 1–25.
- Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies. A study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 435–457.

